Bírálói vélemény
Matolcsi Máté
'Fourier Analysis in Additive Problems'
c. MTA doktori értekezéséről

Matolcsi Máté disszertációja rövid bevezetésből, eredményeit bemutató három fejezetből és irodalomjegyzékből áll, terjedelme 102 oldal.

Az eredményeket tömören ismertető bevezetés utáni fejezetek közül az első parkettázásokkal kapcsolatos kérdéseket és vonatkozó eredményeket tárgyal. Egy lokálisan kompakt Abel csoport egy részhalmazáról akkor mondjuk, hogy parkettáz, ha a csoport lényegében lefedhető a szóban forgó halmaz eltoltjainak lényegében diszjunkt rendszerével. A dolgozatban szereplő eredmények nem ilyen általánosságban, hanem konkrétabb esetekre (véges csoportok, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{R}^d$) vonatkoznak.

A fejezet elején tömören ismertetésre kerülnek az előzmények: pl. Coven-Meyerowitz $\mathbb{Z}$-nek véges nemnegatív számokból álló halmazzal való parkettázására vonatkozó sejtése, a periodikus parkettázás sejtés (a $\mathbb{Z}^d$ és $\mathbb{R}^d$ véges illetve korlátos mérhető halmazzal való parkettázására vonatkozóan az eltolás halmaz teljesen periodikusságáról), a $\mathbb{Z}_N$ csoport parkettázásainak kvázi-periodikusságára vonatkozó Hajós sejtés, valamint Minkowski, Venkov, McMullen $\mathbb{R}^d$ konvex testekkel való parkettázására vonatkozó tételei.

Ezek után kerül megfogalmazásra a fejezetben bemutatott eredmények szempontjából meghatározó jelentőségű, 1974-ből származó Fuglede sejtés. Eszerint $\mathbb{R}^d$ korlátos nyílt halmaza pontosan akkor parkettáz, ha spektrális. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ halmazt spektrálisnak nevezzük, ha az $L^2(\Omega)$ Hilbert-térben van a $\mathbb{R}^d$ karaktereinek Ω-ra való megszorításaiból álló ortogonális bázis. A sejtés tehát a parkettázási tulajdonság és egy Fourier analízishez kötődő tulajdonság szoros kapcsolatát fogalmazza meg.

Bemutatásra kerülnek korábbról ismert pozitív eredmények: ilyenek pl. Fuglede és Venkov ill. McMullen eredményei, amik következményeként adódik a "parkettáz $\to$ spektrális" irányra vonatkozó pozitív állítás $\mathbb{R}^d$-beli konvex testek esetén, illetve Iosevitz, Katz, Tao tétele, ami 2-dimenzióban konvex tartományok között mondja ki a parkettázók és a spektrálisak egybeesését.

Ezután tér rá a szerző idetartozó saját eredményeinek bemutatására. A Proposition 2.2.9-ben nyílt egységkockák uniójára - $\Omega = (0,1)^d + A$, ahol $A \subset \mathbb{Z}^d$ - belátja, hogy Ω pontosan akkor spektrális (parkettáz) $\mathbb{R}^d$-ben, ha A spektrális (parkettáz) $\mathbb{Z}^d$-ben. Ezzel a fenti típusú halmazokra az $\mathbb{R}^d$-ben megfogalmazott Fuglede sejtés $\mathbb{Z}^d$-beli problémává fogalmazható.

A Proposition 2.2.12-ben egy ún. kinagyítási tulajdonságot bizonyít parkettázó és spektrális halmazokra, aminek jelentősége abban áll, hogy ennek segítségével, ha sikerül a Fuglede sejtésre ellenpéldát adni véges csoportban, akkor abból ellenpélda gyártható $\mathbb{Z}^d$-ben, majd az előzőekben említett állítás felhasználásával $\mathbb{R}^d$-ben is.

A Proposition 2.2.16 és 2.2.17 eredményekben véges Abel-csoport részcsoportja és a szerinte vett faktorcsoport bizonyos parkettázó (ill. spektrális) halmazaiból állít elő parkettázó (ill. spektrális) halmazt a teljes csoportban.

A Proposition 2.2.18 a Fuglede sejtés "spektrális $\to$ parkettáz" irányára ad pozitív eredményt kis elemszámú halmaz esetén. Bizonyításra kerül, hogy véges Abel csoport 5-nél nem nagyobb elemszámú spektrális halmaza szükségképpen parkettáz. Ezzel kapcsolatban említendő, hogy szoros összefüggés van diszkrét csoport spektrális halmazai és komplex Hadamard mátrixok között. Nevezetesen, a $\mathcal{G}$ diszkrét csoport $\Omega = \{t_1, \ldots, t_k\}$ részhalmaza spektrális $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \subset \hat{\mathcal{G}}$ spektrummal akkor és csak akkor, ha a $(\gamma_i(t_j))_{ij}$ komplex mátrix Hadamard típusú, azaz ha az oszlopai egymásra merőlegesek és minden elemének abszolút értéke 1. Az 5×5-ös komplex Hadamard mátrixok teljesen leírtak, ennek a nevezetes eredménynek a felhasználásával adódik a fenti állítás.

A Proposition 2.2.20-ban az előbbi állítással analóg eredmény kerül megfogalmazásra: a $\mathbb{Z}^d$ minden 5-nél nem nagyobb elemszámú spektrális halmaza parkettáz.

A fejezet legizgalmasabb részében az elért eredmények segítségével ellenpéldák gyártására kerül sor. A "spektrális $\to$ parkettáz" irányra vonatkozóan az első ilyen példát T. Tao találta 2004-ben 5 dimenzióban (ahogy fentebb említésre került, a Fuglede sejtés 1974-ből származik). A dimenziót Matolcsi Máténak sikerült 4-re redukálnia 2005-ben, majd 2006-ban M.N. Kolountzakis-sal közös cikkükben tovább redukálták azt 3-ra. Ezen eredményt mutatja itt be a szerző. A Theorem 2.2.21 szerint a $\mathbb{Z}_8^3$-nak van olyan spektrális halmaza, ami nem parkettáz. A korábban ismertetett eredmények felhasználásával aztán innen következik hasonló tulajdonságú halmazok létezése $\mathbb{Z}^3$-ban illetve $\mathbb{R}^3$-ban. A háttérben a 6×6-os komplex Hadamard mátrixok összességének gazdagsága áll (ezeknek ezidáig nem ismert teljes jellemzése). Egy speciális nyolcadik egységgyökökből álló 6×6-os Hadamard mátrix segítségével sikerül $\mathbb{Z}_8^3$-ban 6 elemű spektrális halmazt adni, ami nem parkettáz.

A "parkettáz $\to$ spektrális" irányra ellenpéldát gyártani jóval nehezebb feladatnak bizonyul, ami annak következménye, hogy véges csoportban nem ismert olyan egyszerű feltétel, aminek teljesülése szükséges lenne halmazok spektrális voltához.

A szerző a probléma megoldásához Lagarias-Wang univerzális spektrum sejtéséből indul ki. Eszerint, ha T parketázza a $\mathcal{G}$ véges Abel csoportot, akkor a duális csoportnak van olyan részhalmaza (T univerzális spektruma), ami közös spektruma a T minden eltoláshalmazának. A Theorem 2.2.23 eredményben bizonyításra kerül, hogy tetszőleges d esetén az univerzális spektrum sejtés pontosan akkor igaz minden $\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_d}$ csoportra, ha a Fuglede sejtés "parkettáz $\to$ spektrális" iránya fennáll minden ilyen csoportra.

Ezek után a feladat megfelelő véges csoportban olyan parkettázó halmazt találni, aminek nincs univerzális spektruma. Ez történik meg a Proposition 2.2.26-ban. Példát mutat $\mathbb{Z}_{24}^3$-ban olyan 6 elemű parkettázó halmazra, ami rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. A fentiek következménye a Theorem 2.2.27 tétel: $\mathbb{R}^3$-ban van nyílt egységkockáknak olyan véges uniója, ami parkettáz de nem spektrális.

Tudjuk tehát, hogy a Fuglede sejtés általában nem igaz, de azt is tudjuk, hogy számos speciális esetben fennáll az ekvivalencia. (Megjegyzendő, hogy 1- és 2-dimenzióban továbbra is teljesen nyitott a probléma.) Mivel a spektrális halmazok és a komplex Hadamard mátrixok között a már említett szoros összefüggés van, így ezen esetekben a parkettázó halmaz spektrális tehát Hadamard mátrixhoz vezet. Említettük, hogy a komplex Hadamard mátrixok leírása 5-öd rendig ismert, teljes karakterizáció már a 6×6-os esetben sincs. Ismertek viszont bizonyos gyűjtemények, pl. a Tadej-Życzkowski-tól származó 16 renddel bezárólag. Továbbá Dita egy cikkében általános konstrukciót adott komplex Hadamard mátrixok bizonyos paraméteres családjainak előállítására összetett dimenzióban. A szerző egy cikkében megmutatta, hogy minden Dita-típusú Hadamard mátrix előállítható a $\mathbb{Z}^d$ alkalmas parkettázásához kapcsolódóan. A disszertációban pedig a szóban forgó cikk alapján megmutatja, hogy egy Szabó Sándortól származó parkettázási konstrukció nem Dita-típusú Hadamard mátrixokhoz vezet (Proposition 2.3.5), majd előállítja ilyen mátrixok új paraméteres családjait 8,12,16 rendben, amik nem szerepelnek a Tadej-Życzkowski gyűjteményben.

A disszertáció következő, az előző részhez hasonlóan rengeteg információt, új ismeretet tartalmazó fejezetének címe: a Delsarte módszer Fourier analitikus formája. Delsarte nevezetes becslése és módszere eredetileg a következő kérdéssel kapcsolatos: maximum hány n hosszú bináris szó adható meg úgy, hogy bármely kettő legalább d helyen eltérjen egymástól? Delsarte módszerét és általánosításait nevezetes egyéb problémákban is nagy sikerrel használták. A fejezetben ezen módszer Fourier analitikus megfogalmazása és alkalmazásai kerülnek bemutatásra.

A tekintett probléma a következő. Adott véges Abel csoport szimmetrikus és a 0-t tartalmazó A részhalmaza esetén maximálisan hány eleme lehet egy olyan B csoportbeli részhalmaznak, melynek elemei különbségei elkerülik az A-t (azaz a különbségek mind az $A^c \cup \{0\}$-ban vannak)? Jelölje $\Delta(A)$ ezen számot és $\delta(A)$ a $\Delta(A)$ és a csoport elemszámának hányadosát. Továbbá jelölje $\overline{\Delta}(A)$ azon B halmazok elemszámainak maximumát, melyek elemeinek különbségei A-ban vannak és legyen $\overline{\delta}(A)$ a $\overline{\Delta}(A)$ reciproka. Ezek után bevezetésre kerülnek bizonyos Fourier analitikus mennyiségek, $\lambda(A), \lambda^-(A), \lambda^+(A), \lambda^\pm(A)$, melyek az A halmazhoz kapcsolódó, a csoporton értelmezetett bizonyos függvényosztályokkal, elemeik Fourier-transzformáltjaival kifejezett mennyiségek. Ezek közül a $\lambda(A)$-t Turán konstansnak, a $\lambda^-(A)$ mennyiséget pedig Delsarte konstansnak szokás nevezni. (Megjegyzendő, hogy ezekről a mennyiségekről kiderül, hogy azok valóban csak az A-tól függnek, az alapcsoporttól nem.)

A fő eredmények közül a Theorem 3.1.4 tétel a fenti mennyiségek közötti nagyságrendi viszonyokat állapít meg, ezek között szerepel a $\delta(A) \leq \lambda^-(A)$ egyenlőtlenség, ami a Delsarte becslés Fourier analitikus alakja.

A tétel után fő problémaként megfogalmazásra kerül, hogy milyen kapcsolat(ok) van(nak) a fordított irány(ok)ban, lehetséges-e valamilyen gyenge értelemben fordított irányú egyenlőtlensége(ke)t bizonyítani. Idevágó eredmények szerepelnek a Theorem 3.1.6-ban. Ezekből kiderül, hogy a $\overline{\delta}$ valamint λ^- és $\lambda^\pm$ mennyiségek között a fordított irányú becslések még gyenge formában sem állnak fenn. Továbbá következik, hogy bizonyos esetekben a $\delta(A)$ felső becslésénél lényegesen jobb eredmény kapható $\lambda^-(A)$ kiszámolásával, mint pl. a $\lambda^\pm(A)$-val. A szerző szerint ennek az észrevételnek konkrét jelentősége lehet pl. annak a problémának tervezett vizsgálatában, hogy maximum mekkora lehet egy $A \subset \{1,...,N\}$ halmaz, ha tudjuk, hogy $A - A$ nem tartalmaz k-adik hatványt (k rögzített). A fenti tétel bizonyítása igen összetett, többek között random halmazokra valamint a $\mathbb{Z}_2^d$ diadikus csoportban vett gömbökre és komplementereikre vonatkozó becslések kerülnek benne felhasználásra. Ide tartozik, hogy a random halmazokra vonatkozó Theorem 3.1.28 és 3.1.29 eredményekben a λ és δ mennyiségek nagyságrendjében mutatkozó eltérés viágossá teszi, hogy a Delsarte módszer nem mindig ad éles becslést a kívánt mennyiségre.

A fentiek mellett számos eredményt találunk a fejezetben arra vonatkozóan, hogy hogyan viselkednek a vizsgált mennyiségek a halmazelméleti műveletekkel, algebrai konstrukciókkal kapcsolatban, milyen invariancia-tulajdonságaik vannak. Ezek közül kiemelendő a Theorem 3.1.13 tétel, ami bizonyos dualitásokat állapít meg a tekintett mennyiségek között.

A továbbiakban alkalmazások bemutatására kerül sor mégpedig igen különböző jellegű problémákkal kapcsolatban. A Theorem 3.2.2 következményeként a Delsarte módszer alkalmazásával $p = 4k + 1$ alakú prímek esetén a kapcsolódó Paley-gráf $s(p)$ függetlenségi számára vonatkozó ismert $s(p) \leq \sqrt{p}$ becslést (ami évtizedek óta a legjobb ismert becslés) sikerül megjavítani a fenti prímek háromnegyed része esetén $s(p) \leq \sqrt{p} - 1$-re. A javulás numerikusan ugyan minimális, de a szerző esélyt lát arra, hogy a módszer az $s(p) \leq \sqrt{p} - cp^{1/4}$ becslést is szolgáltatni fogja.

A következő alkalmazási terület a kölcsönösen torzítatlan bázisok problémakörével kapcsolatos. A $\mathbb{C}^d$ két egységvektorát torzítatlannak nevezzük, ha belsőszorzatuk abszolútértéke $1/\sqrt{d}$. Két ortonormált bázist $\mathbb{C}^d$-ben kölcsönösen torzítatlannak (MUB) nevezünk, ha az első illetve a második bázisból vett elempárok mind torzítatlanok. Több szempontból fontos kérdés annak vizsgálata, hogy adott d dimenzióban mekkora a kölcsönösen torzítatlan bázisok maximális rendszerének számossága. Jól ismert becslés erre a $d + 1$ (Theorem 3.3.1), prímhatvány d esetén pedig tudott, hogy ez a szám pontosan $d + 1$ (Theorem 3.3.2).

A nevezetes MUB probléma azt kérdezi, hogy igaz-e ez az összefüggés nem prímhatványok esetén is. A kérdés sokak által intenzíven vizsgált probléma, aminek alapvető kvantuminformáció elméleti motivációja van.

A fenti kérdés átfogalmazható Hadamard mátrixokra. Ha ugyanis egy bázist MUB-ok egy rendszeréből rögzítünk és a többit eszerint koordinátázzuk, akkor (skálázás után) komplex Hadamard mátrixok egy egymásra torzítatlan (MUH) rendszeréhez jutunk. Ezen mátrixok oszlopai a $\mathbb{T}^d$ csoport elemei, melyekkel kapcsolatban a Delsarte módszer alkalmazható (itt a csoport ugyan nem véges, de kompakt és a módszer kiterjeszthető erre az esetre).

Ily módon kapja a szerző a Theorem 3.3.6-ban a Theorem 3.3.1 egyfajta általánosítását: $\mathbb{C}^d$-beli adott ortonormált bázis esetén az azt kiegészítő egységvektorok tetszőleges olyan halmazának, aminek elemei mind torzítatlanok a bázis elemeihez, egymáshoz pedig vagy torzítatlanok vagy ortogonálisak, a számossága legfeljebb d^2.

Bevezetve komplex Hadamard mátrixok Fourier transzformáltjának fogalmát a szerző megmutatja, hogy ezzel az ortogonalitás és torzítatlanság feltételei jól kezelhető lineáris korlátozó feltételekbe mennek át. Ennek felhasználásával a $d \leq 5$ esetben a MUB-okra vonatkozó fontos ismert strukturális tételekre nyer új, elegáns bizonyítást. A Corollary 3.3.9-ben pedig Haagerupnak az ötöd rendű komplex Hadamard mátrixokat karakterizáló nevezetes tételére ad rövid bizonyítást.

A következő részben nem-létezési tételeket bizonyít. Megmutatja például, hogy MUH-ok d elemszámú (tehát teljes) rendszerében, ha van egy valós elemű Hadamard mátrix, akkor a rendszer többi tagjában egyetlen oszlop sem lehet valós (Corollary 3.3.13), továbbá, hogy nincs olyan teljes MUH rendszer 6-dimenzióban, ami az F_6 Fourier mátrixot tartalmazná (Proposition 3.3.14), illetve hogy olyan sincs, ami a Fourier család valamely $F_6(a,b)$ elemét tartalmazná (Theorem 3.3.15).

A fejezet utolsó részében a szerző a Delsarte módszer további lehetséges alkalmazásait tárgyalja különböző problémákra vonatkozóan (egészek k-hatványt elkerülő halmazai, egységtávolságot elkerülő halmazok $\mathbb{R}^d$-ben, Littlewood szimultán approximációkra vonatkozó sejtése). Végül, a Theorem 3.4.1-ben egy eddig publikálatlan javítását adja a Delsarte korlátnak, melyről sejtetni engedi, hogy esetleg komoly alkalmazása lehet a MUB problémára vonatkozóan.

A disszertáció negyedik, utolsó fejezetében a jelölt összeghalmazok számosságával kapcsolatos válogatott eredményeit mutatja be. A probléma az additív kombinatorika központi kérdései közé tartozik, az itt alkalmazott módszerek tisztán kombinatorikai jellegűek, nem használnak Fourier analízist. Az első szakaszban egész számokból álló $A_1, \ldots, A_k$ halmazok $A_1 + \ldots + A_k$ összege számosságának a hiányos $A_1 + \ldots + A_i + A_{i+1} + \ldots + A_k$ összegek számosságaival való viszonyára vonatkozó szuperadditivitási és szubmultiplikativitási tételek szerepelnek (Theorem 4.1.1. és 4.1.2). A fő újdonság a korábbról ismert eredményekhez képest az, hogy a szerző tetszőleges számú halmazt tekint (k tetszőleges természetes szám), így adódnak a korábban csak kis k-k esetére érvényes eredmények kiterjesztései. Absztraktabb körülmények között is bizonyít szuperadditivitási tételt (Theorem 4.1.4), nevezetesen torziómentes csoportokban. A fejezet egy külön szakasza ezen eredmények saját (társszerzőkkel közös) illetve mások által kapott általánosításait tárgyalja.

A fejezet második részében bizonyos $\mathbb{R}^d$-beli össszeghalmazok számosságára vonatkozó alsó becsléseket ad meg a szerző. A fő eredmény Freiman egy ilyen jellegű lemmájának jelentős kiterjesztése (Theorem 4.2.5).

Matolcsi Máté disszertációjában 12 dolgozat eredményeit mutatja be. Ezek közül 2 önálló, 6 két szerzős, 4 pedig három társszerzővel közösen írt cikk. Ezen munkák közül 10-re ezidáig az MTMT szerint 126 független hivatkozás született, a 2 hivatkozás nélküli dolgozat 2013-ban illetve 2014-ben jelent meg.

A parkettázás témakörben feldolgozott cikkekre történt messze a legtöbb hivatkozás, szám szerint 104. Az összeghalmazok számosságára vonatkozó dolgozatokra 18, a Delsarte módszerrel kapcsolatosakra pedig 4 független hivatkozás található az MTMT-ben. A hivatkozások között jelentős részben találhatók igen rangos folyóiratokban megjelent cikkek, a teljesség igénye nélkül néhány folyóiratcím: Adv. Math., J. Fourier Anal. Appl., J. Funct. Anal., J. London Math Soc., Trans. Amer. Math. Soc. Az elért eredmények elismertsége, tudományos hatása tehát vitathatatlan.

A fentiekkel összhangban a disszertációban bemutatott teljes munkát, a szerzőnek a Fourier analízis additív jellegű problémákban való használatára vonatkozó eredményeit igen magas színvonalúnak tartom. Vizsgálatainak köre széles, mély problémákkal foglalkozik, amit jól mutat, hogy a műben lényeges utalások történnek olyan matematikusok munkáira, mint a Fields érmes J. Bourgain, T. Tao vagy az operátoralgebrák elméletének egyik meghatározó kutatója U. Haagerup. (T. Tao egyébként egy cikkében és egy könyvében is hivatkozik a disszertáció utolsó fejezetében szereplő eredményekre.) A felhasznált matematikai apparátus összetett, a szerző egymástól elvileg távol eső területek eszközeit kombinálja és ér el jelentős eredményeket nehéz, sokak által kutatott problémákkal (úm. Fuglede sejtés, Hadamard mátrixok, Delsarte módszer, MUB probléma, összeghalmazok) kapcsolatban.

A disszertáció kiállítása példás, rendkívüli gondossággal megírt munka. Bemutatja a vizsgált problémakörök történetét és a nyert eredményeket ezek összefüggésében helyezi el. Hatalmas információmennyiséget tartalmaz, a prezentáció tömörsége nekem néhol megnehezítette a mű olvasását, de egyrészt a hiba bennem van, másrészt a szerző törekedett a terjedelem kordában tartására, amiért inkább dicséretet érdemel.

A disszertációval kapcsolatban konkrét kérdést nem fogalmazok meg, megteszi ezt helyettem a szerző azzal, hogy munkájában nagy számban szerepeltet nyitott problémákat, említ lehetséges vizsgálandó irányokat. Ezekkel kapcsolatban általánosságban kérdezem, hogy milyen előrelépések születtek a doktori mű elkészítése óta, milyen fontosabb új fejleményekről tud beszámolni (pl. Paley gráfok függetlenségi számával kapcsolatban sejtett becslés-javítás, a Delsarte korlát említett javításának a MUB-problémára való alkalmazása, stb)?

Összefoglalva megállapítható és megállapítandó, hogy Matolcsi Máté a Fourier analízis additív jellegű problémákban való felhasználásának különböző területein és az összeghalmazokkal kapcsolatban fontos eredményeket ért el és érdemben hozzájárult a szóban forgó területek fejlődéséhez. A disszertációban bemutatott eredményeket (melyek mindegyike a korábbi fokozatszerzés után született) érdekeseknek, értékeseknek és mélyeknek tartom. Rendkívüli meggyőző erővel bír számomra a matematika különböző területeiről származó eszközök használata és az elért eredményeknek ugyancsak különböző területeken való hasznos alkalmazása.

A disszertáció nyilvános vitára tűzését és - sikeres védés esetén - az MTA doktori cím odaítélését Matolcsi Máté részére mindenképpen indokoltnak tartom és messzemenően támogatom.

Molnár Lajos
MTA doktora

Hajdúszoboszló, 2015. április 26.